

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי 2 (52)

סימולציה

מרצה: ד"ר יוסי שמאי. משך הבחינה: 3 שעות.

הוראות:

לבחינה חמש שאלות. עליכן לענות בדיוק על ארבע מתוכן. משקל כל שאלה הוא 25 נקודות. אין בחירה בין סעיפים של אותה שאלה. תשובות לא מנומקות לא יקבלו ניקוד. עליכן לצטט את כל התנאים לכל משפט או טענה. חל איסור מוחלט להסתמך על חומר שלא נלמד בקורס. אין לרשום פתרונות במקומות שאינם מיועדים לכך! אין לרשום פתרונות מאחורי הדף!!!

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נקודות)

1.1. (17 נקודות) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים.
 1.1.1 (2 נקודות) הגדירו את המושג הבא: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ הוא טור לייבניץ.
 פתרון:

1.1.2 (15 נקודות) נניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ הוא טור לייבניץ. הוכיחו שהטור מתכנס לערך $s \in \mathbb{R}$ וכי $a_1 - a_2 \leq s \leq a_1$.
 פתרון:

(עמוד זה נשאר ריק על מנת לאפשר עוד מקום לפתרון שאלה 1.1.2)

1.2. (8 נקודות) חשבו את ערך הטור הבא, או הוכיחו שהוא לא מתכנס במובן הרחב:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} \right)$$

פתרון:

שאלה 2 (25 נקודות)
2.1. (18 נקודות)

2.1. (15 נקודות) הוכיחו כי לכל $-1 \leq x \leq 1$ מתקיים

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

פתרון:

(עמוד זה נשאר ריק על מנת לאפשר עוד מקום לפתרון שאלה 2.1)

2.2. (10 נקודות) חשבו את הגבול הבא, או הוכיחו שהוא לא קיים במובן הרחב:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n^{0.6} (n^2 + 1)^{0.7} - n^2 \right]$$

רמז: הביטו בפונקציה המוגדרת ע"י $f(x) = x^{0.7}$ לכל $x > 0$.
פתרון:

שאלה 3 (25 נקודות)

3.1. (13 נקודות) נביט בסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת ע"י הנוסחה הרקורסיבית

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} & \forall n \in \mathbb{N} \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

3.2. (12 נקודות) תהי $f : (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה. נניח שהגבול $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ לא קיים במובן הרחב. הוכיחו שקיימת $c \in (0, 2)$ שעבורה $f'(c) = 0$.
פתרון:

שאלה 4 (25 נקודות)

4.1. (9 נקודות) תהיינה $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a < b$ ותהי f פונקציה המוגדרת ב- $[a, b]$. נניח כי f^2 אינטגרבילית ב- $[a, b]$ וכי $\int_a^b f^2(x) dx = 0$. תהי $x_0 \in (a, b)$. הוכיחו כי אם f רציפה ב- x_0 אזי $f(x_0) = 0$.
פתרון:

4.2. (9 נקודות) נביט בפונקציה המוגדרת ע"י $f(x) = \int_{3x}^0 \frac{\arctan(t)}{2+t^4} dt$ לכל $x > 0$. חשבו את $f'(\frac{1}{3})$.

פתרון:

4.3. (7 נקודות) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: מתקיים

$$1 - \frac{\pi^2}{3!} + \frac{\pi^4}{5!} - \frac{\pi^6}{7!} + \cdots = 0$$

פתרון:

שאלה 5 (25 נקודות)

5.1. (13 נקודות) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים חיוביים ויהי $p \in \mathbb{R}$. נביט בסדרה המוגדרת ע"י

$$b_n = \frac{\ln\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\ln(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

נניח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{p-b_n} = 1$. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם $p > 1$.
פתרון:

(עמוד זה נשאר ריק על מנת לאפשר עוד מקום לפתרון שאלה 5.1)

5.2. (12 נקודות) חשבו את הגבול הבא, או הוכיחו שהוא לא קיים במובן הרחב:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 [2 \ln(x) - \ln(x^2 + 1)]$$

פתרון:

(עמוד זה נשאר ריק למקרה שחסר לכם עוד מקום)

(עמוד זה נשאר ריק ללא סיבה נראית לעין)