

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי 2 (52)

מועד ב'

מרצה: ד"ר יוסי שמאי. משך הבחינה: 3 שעות.

הוראות:

לבחינה חמש שאלות. עליכן לענות בדיוק על ארבע מתוכן. משקל כל שאלה הוא 25 נקודות. אין בחירה בין סעיפים של אותה שאלה. תשובות לא מנומקות לא יקבלו ניקוד. עליכן לצטט את כל התנאים לכל משפט או טענה. חל איסור מוחלט להסתמך על חומר שלא נלמד בקורס. אין לרשום פתרונות במקומות שאינם מיועדים לכך! אין לרשום פתרונות מאחורי הדף!!!

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נקודות)

1.1. (17 נקודות) יהי $0 \leq k \in \mathbb{N}$ ותהינה $(a_n)_{n=k}^\infty, (b_n)_{n=k}^\infty$ שתי סדרות של מספרים חיוביים.
 1.1.1 (8 נקודות) נניח כי

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

הוכיחו כי $\sum_{n=N}^\infty b_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=N}^\infty a_n < \infty$.
 פתרון:

1.1.2 (9 נקודות) נניח שקיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש- $0 \leq L < 1$ וכך ש-

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

הוכיחו כי $\sum_{n=k}^\infty a_n < \infty$.
 פתרון:

(עמוד זה נותר ריק לצורך המשך הפתרון של שאלה 1.1)

1.2. (8 נקודות) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: הסדר הבא מתכנס:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

פתרון:

שאלה 2 (25 נקודות)

2.1. (15 נקודות) תהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ותהי $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים. יהיו $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ כך ש- $|x_2 - x_0| < |x_1 - x_0|$. נניח כי טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ מתכנס ב- $x = x_1$. הוכיחו כי טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ מתכנס בהחלט ב- $x = x_2$. פתרון:

2.2. (10 נקודות) מצאו את תחום ההתכנסות של טור החזקות הבא:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2^n} = x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + x^{32} + \dots$$

פתרון:

שאלה 3 (25 נקודות)

3.1. (13 נקודות) תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות של מספרים ממשיים. נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי וכי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בהחלט. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ מתכנס בתנאי.
פתרון:

3.2. (12 נקודות) מצאו את כל הערכים של $a \geq 0$ שעבורם הטור הבא מתכנס:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2} \cdot a^n}{n^{1.5}}$$

פתרון:

שאלה 4 (25 נקודות)

4.1. (13 נקודות)

4.1.1 (5 נקודות) חשבו את האינטגרל המסוים $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx$. רמז: הסבירו מדוע האינטגרל מוגדר היטב.

4.1.2 (8 נקודות) הסיקו כי

$$\frac{\ln(2)}{2e} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x} \tan(x) dx \leq \frac{\ln(2)}{2}$$

רמז: הסבירו מדוע האינטגרל מוגדר היטב. הערה: תוכלו להניח כי $\pi < 4$.

פתרון:

(עמוד זה נשאר ריק על מנת לאפשר עוד מקום לפתרון שאלה 4.1)

4.2. (12 נקודות) קבעו האם הטור הבא מתכנס או מתבדר:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{\sin(n)}{\ln(n)} \cdot \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{5^n \cdot n!} \right]$$

פתרון:

שאלה 5 (25 נקודות)

5.1. (7 נקודות) תהי f פונקציה הגזירה ברציפות בקטע $[0, 1]$. נניח כי $f(1) = 2$ וכי $\int_0^1 f(x) dx = 1$. חשבו את הערך של האינטגרל המסוים $\int_0^1 [x \cdot f'(x)] dx$. רמז: הסבירו למה האינטגרל מוגדר היטב.
פתרון:

5.2. (18 נקודות) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים.
 5.2.1 (10 נקודות) יהי $p \in \mathbb{R}$. נניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{a_n^p}$ מתכנס בתנאי. הוכיחו כי $0 < p \leq 1$.
 פתרון:

5.2.2 (8 נקודות) תנו דוגמה לסדרה עולה ממש של מספרים טבעיים $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שעבורה הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{a_n^p}$ לא מתכנס בתנאי
לכל $p \in \mathbb{R}$.
פתרון:

(עמוד זה נשאר ריק למקרה שחסר לכם עוד מקום)

(עמוד זה נשאר ריק סתם כי אני רוצה לבדוק אם מדור בחינות ישימו לב)