

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי 2 (52)

מועד ב'

אין לרשום פתרונות מאחורי הדף!!!

מרצה: ד"ר יוסי שמאי
משך הבחינה: 3 שעות

הוראות:

לבחינה חמש שאלות. עליכן לענות בדיוק על ארבע מתוכן. משקל כל שאלה הוא 25 נקודות. אין בחירה בין סעיפים של אותה שאלה. תשובות לא מנומקות לא יקבלו ניקוד. עליכן לצטט את כל התנאים לכל משפט או טענה. חל איסור מוחלט להסתמך על חומר שלא נלמד בקורס. בסוף הבחינה יש להגיש את כל שאלון הבחינה. אסור להפריד דפים מהשאלון! אין לרשום פתרונות במקומות שאינם מיועדים לכך! אין לרשום פתרונות מאחורי הדף!!!

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נקודות)

1.1. (15 נקודות) יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a < b$. תהיינה f, g שתי פונקציות המוגדרות ב- $[a, b]$. נניח כי

- (i) f, g רציפות ב- $[a, b]$.
- (ii) f, g גזירות ב- (a, b) .
- (iii) $g'(x) \neq 0$ לכל $x \in (a, b)$.

הוכיחו שקיימת $a < c < b$ כך ש-

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

פתרון:

1.2. (10 נקודות) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים. נניח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-16}{2n+3} a_n$ מתכנס.
פתרון:

שאלה 2 (25 נקודות)

2.1. (17 נקודות) תהינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ שתי סדרות של מספרים ממשיים.

2.1.1. (7 נקודות) תהי $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים. נניח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ קיים. הוכיחו כי $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ קיים וכי

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

פתרון:

2.1.2. (2 נקודות) הגדירו את המושג: הטור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתקבל מהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ע"י השמת סוגריים. פתרון:

2.1.3. (8 נקודות) נניח כי $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתקבל מהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ע"י השמת סוגריים. נניח בנוסף שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנס, ו- $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. פתרון:

2.2. (8 נקודות) חשבו את ערך הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$ או הוכיחו שהוא לא מתכנס. רמז: מתקיים $\frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right)$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
פתרון:

שאלה 3 (25 נקודות)

3.1. (12 נקודות) חשבו את הגבול הבא או הוכיחו שהוא לא קיים במובן הרחב

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot(x) - \frac{1}{x}}{x}$$

הערה: $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
פתרון:

3.2. (13 נקודות) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים. נביט בסדרה המוגדרת ע"י

$$b_n = \begin{cases} a_k & n = 2k - 1 \\ -a_k & n = 2k \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אם ורק אם $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.
פתרון:

שאלה 4 (25 נקודות)

4.1. (15 נקודות) יהי $\alpha \geq 0$ ונביט בסדרה המוגדרת ע"י

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2} (a_n^2 + 1) & \forall n \in \mathbb{N} \\ a_1 = \alpha \end{cases}$$

4.1.1. (5 נקודות) הוכיחו שהסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ עולה והסיקו שהסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב.

פתרון:

4.1.2. (10 נקודות) לכל $\alpha \geq 0$, חשבו את הערך של $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

פתרון:

4.2. (10 נקודות) תהי סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ של מספרים ממשיים. נביט בסדרה המוגדרת ע"י $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ לכל $N \in \mathbb{N}$ ונביט בסדרה המוגדרת ע"י $b_n = S_n^2 - 2S_{n-1} + 3$ לכל $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. נניח שהטור $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ מתכנס. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר. רמז: למשוואה $x^2 - 2x + 3 = 0$ אין פתרון ממשי. פתרון:

שאלה 5 (25 נקודות)

5.1. (15 נקודות) נביט בטור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$.
5.1.1. (5 נקודות) מצאו את תחום התכנסות טור החזקות.
פתרון:

5.1.2. (10 נקודות) חשבו את ערך הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)}$.
פתרון:

5.2. (10 נקודות) הוכיחו שלכל $x > -1$ מתקיים

$$(1+x)\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$$

פתרון:

