

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי 2 (52)

מועד ב' — 09/08/2023

אין לרשום פתרונות מאחורי הדף!!!

מרצה: ד"ר יוסי שמאי

משך הבחינה: 3 שעות

הוראות:

לבחינה חמש שאלות. עליכן לענות בדיוק על ארבע מתוכן. משקל כל שאלה הוא 25 נקודות. אין בחירה בין סעיפים של אותה שאלה. תשובות לא מנומקות לא יקבלו ניקוד. עליכן לצטט את כל התנאים לכל משפט או טענה. חל איסור מוחלט להסתמך על חומר שלא נלמד בקורס. בסוף הבחינה יש להגיש את כל שאלון הבחינה. אסור להפריד דפים מהשאלון! אין לרשום פתרונות במקומות שאינם מיועדים לכך! אין לרשום פתרונות מאחורי הדף!!!

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נקודות) תהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ותהי $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים.

(א) (15 נקודות) תהיינה $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ כך ש- $|x_2 - x_0| < |x_1 - x_0|$. נניח כי טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ מתכנס בנקודה $x = x_1$. הוכיחו כי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ מתכנס בהחלט בנקודה $x = x_2$.

(ב) (10 נקודות) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה הגזירה אינסוף פעמים. יהי T_f טור הטיילור של f סביב $x_0 = 0$. נניח שקיים $M > 0$ כך ש- $|f^{(n)}(x)| \leq M$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in \mathbb{R}$. הוכיחו כי $f(x) = T_f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

שאלה 2 (25 נקודות) תהי f הפונקציה המוגדרת על ידי $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2n \cdot (2n+1)}$ לכל $-1 \leq x \leq 1$.
 (א) (9 נקודות) יהי $x \in \mathbb{R}$. חשבו את האינטגרל המסויים

$$\int_0^x \ln(1+t^2) dt$$

(ב) (6 נקודות) הוכיחו כי f מוגדרת היטב.

(ג) (10 נקודות) מצאו ביטוי מפורש ל- $f(x)$ לכל $-1 \leq x \leq 1$

שאלה 3 (25 נקודות)

(א) (12 נקודות) תהיינה $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a < b$ ותהי f פונקציה החסומה ב- $[a, b]$. תהי $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של חלוקות של $[a, b]$, ויהיו $\bar{S}(f, P_n)$ ו- $\underline{S}(f, P_n)$ הסכום העליון והסכום התחתון של f ביחס ל- P_n לכל $n \in \mathbb{N}$. נניח כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\bar{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n)] = 0$$

הוכיחו כי f אינטגרבילית ב- $[a, b]$.

(ב) (13 נקודות)

(i) (4 נקודות) חשבו את ערכו של הגבול הבא:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(1+x^2)}$$

(ii) (9 נקודות) קבעו האם האינטגרל הלא אמיתי הבא מתכנס או מתבדר

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\ln(1+x^2)}$$

שאלה 4 (25 נקודות)

(א) (9 נקודות) יהי $0 \leq k \in \mathbb{Z}$ ותהיינה $(a_n)_{n=k}^\infty, (b_n)_{n=k}^\infty$ שתי סדרות של מספרים ממשיים. נניח כי $a_n \geq 0$ וכי $b_n > 0$ לכל $n \geq k$. נניח בנוסף כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

הוכיחו כי $\sum_{n=k}^\infty b_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=k}^\infty a_n < \infty$.

(ב) (16 נקודות) נביט בסדרת המספרים הממשיים $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ המוגדרת על ידי $a_n = \int_n^{n+1} \frac{dx}{\ln(x)}$ לכל $n \geq 2$.
(i) (7 נקודות) הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(ii) (7 נקודות) הוכיחו כי הסדרה $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ היא יורדת.

(iii) 2 נקודות) הסיקו שקיים $s \in \mathbb{R}$ שעבורו $s = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$.

שאלה 5 (25 נקודות)

(א) (2 נקודות) תהי $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ותהי F פונקציה המוגדרת לפחות בסביבה של (x_0, y_0) . הגדירו את המושג: הנגזרת החלקית $F'_x(x_0, y_0)$.

(ב) (7 נקודות) נביט בפונקציה $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $F(x, y) = e^x \cos(y)$ לכל $x, y \in \mathbb{R}$. חשבו את הערך של $F''_{xx}(x, y) + F''_{yy}(x, y)$ לכל $x, y \in \mathbb{R}$.

(ג) (7 נקודות) הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) = 1$

(ד) (9 נקודות) הוכיחו שהטור הבא מתבדר

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+1)}$$