

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי 2 (53)

מועד ב' – 21/07/2022

אין לרשום פתרונות מאחורי הדף!!!

									מספר ת"ז :
									מספר מחברת :

מרצה: ד"ר יוסי שמאי
משך הבחינה: 3 שעות

הוראות:

לבחינה חמש שאלות. עליכן לענות בדיוק על ארבע מתוכן. משקל כל שאלה הוא 25 נקודות. אין בחירה בין סעיפים של אותה שאלה. תשובות לא מנומקות לא יקבלו ניקוד. חל איסור מוחלט להסתמך על חומר שלא נלמד בקורס. בסוף הבחינה יש להגיש את כל שאלון הבחינה. אסור להפריד דפים מהשאלון! אין לרשום פתרונות במקומות שאינם מיועדים לכך! אין לרשום פתרונות מאחורי הדף!!!

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נקודות) תהייה $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ ותהי $(a_n)_{n=0}^\infty$ סדרה של מספרים ממשיים.

(א) (3 נקודות) הגדירו את המושג: טור החזקות $\sum_{n=0}^\infty a_n(x - x_0)^n$ מתכנס בהחלט ב- x_1 . עליכן לרשום את ההגדרה בשפת ה- $\epsilon - N$. פתרון:

(ב) (15 נקודות) נניח שקיים $0 \leq L \leq \infty$ כך ש- $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow L$. יהי $0 \leq R \leq \infty$ רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. הוכיחו שאם $0 < L < \infty$, אזי $R = \frac{1}{L}$.

פתרון:

(ג) (7 נקודות) חשבו את ערך האינטגרל המסוים הבא: $\int_0^1 x \ln(1+x^2) dx$

פתרון:

שאלה 2 (25 נקודות)

(א) (10 נקודות) יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a < b$. תהי f פונקציה המוגדרת ב- $[a, b]$. נניח כי f רציפה ב- $[a, b]$ ותהי G פונקציה קדומה של f ב- $[a, b]$. הוכיחו כי

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

(ב) (15 נקודות) תהי $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית יורדת, כך ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.
(i) (6 נקודות) הוכיחו שקיים $0 \leq k \in \mathbb{Z}$ שעבורו הפונקציה $\sin(f(x))$ יורדת ב- $[k, \infty)$.

פתרון:

(ii) (9 נקודות) נניח כי האינטגרל $\int_0^\infty \sin(f(x)) dx$ מתכנס. הוכיחו שהטור $\sum_{n=0}^\infty (e^{f(n)} - 1)$ מתכנס. פתרון:

שאלה 3 (25 נקודות)

(א) (13 נקודות) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים חיוביים. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

פתרון:

(ב) (12 נקודות) תהינה $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ שתי סדרות של מספרים ממשיים. נניח כי $|b_n| \leq 2$ לכל $n \in \mathbb{Z}$. $0 \leq R_1 \leq \infty$ יהי רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n (x-x_0)^n$ ויהי $0 \leq R_2 \leq \infty$ רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$.

(i) (6 נקודות) הוכיחו כי $R_2 \geq R_1$.

(i) (6 נקודות) מצאו דוגמא שבה $R_2 > R_1$.

שאלה 4 (25 נקודות)

(א) (12 נקודות) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} [n(1-p)^{n-1} \cdot p]$ מתכנס לכל $0 < p < 2$, וחשבו את ערכו כפונקציה של p .

פתרון:

(ב) (13 נקודות)

(i) (4 נקודות) הוכיחו כי לכל $q > 0$ קיים $k \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq k$ מתקיים $\ln(n) \leq n^q$.

פתרון:

(ii) (9 נקודות) מצאו את כל הערכים של $r \in \mathbb{R}$ שעבורם הטור הבא מתכנס: $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^r}$.

שאלה 5 (25 נקודות)

(א) (15 נקודות) הוכיחו כי לכל $-1 \leq x \leq 1$ מתקיים

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

פתרון:

(ב) (3 נקודות) תהי $D \subseteq \mathbb{R}^2$, תהי $(x_0, y_0) \in D$ ותהי $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בסביבה של (x_0, y_0) . הגדירו את המושג:
 $\nabla F(x_0, y_0)$.
 פתרון:

(ב) (7 נקודות) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: לפונקציה $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

יש נגזרת כיוונית ב- $(0, 0)$ בכל כיוון.

פתרון: