

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי 2 (52)

מועד א' — 28/06/2024

אין לרשום פתרונות מאחורי הדף!!!

מרצה: ד"ר יוסי שמאי

משך הבחינה: 3 שעות

הוראות:

לבחינה חמש שאלות. עליכן לענות בדיוק על ארבע מתוכן. משקל כל שאלה הוא 25 נקודות. אין בחירה בין סעיפים של אותה שאלה. תשובות לא מנומקות לא יקבלו ניקוד. עליכן לצטט את כל התנאים לכל משפט או טענה. חל איסור מוחלט להסתמך על חומר שלא נלמד בקורס. בסוף הבחינה יש להגיש את כל שאלון הבחינה. אסור להפריד דפים מהשאלון! אין לרשום פתרונות במקומות שאינם מיועדים לכך! אין לרשום פתרונות מאחורי הדף!!!

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נקודות)

1.1. (15 נקודות) תהינה סדרה של מספרים ממשיים. נניח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ הוא טור לייבניץ. הוכיחו כי הוא מתכנס לערך $s \in \mathbb{R}$, וכי $a_1 - a_2 \leq s \leq a_1$. פתרון:

1.2. (10 נקודות) חשבו את ערך האינטגרל המסוים הבא:

$$\int_0^1 \arccos(x) \, dx$$

פתרון:

שאלה 2 (25 נקודות)

2.1. (18 נקודות)

2.1.1. (5 נקודות) הוכיחו כי תחום ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$ הוא הקטע $(-1, 1]$.

פתרון:

2.1.2. (13 נקודות) הוכיחו כי לכל $-1 < x \leq 1$ מתקיים

$$\ln |1+x| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

פתרון:

2.2. (7 נקודות) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: הטור $1 - 1 + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots$ מתכנס.
פתרון:

שאלה 3 (25 נקודות)

3.1. (17 נקודות) תהי f פונקציה המוגדרת ב- $[0, 1]$.

3.1.1. (2 נקודות) הגדירו את המושג: f גזירה ב- $[0, 1]$. הערה: אינכם צריכות להשתמש בשפת ה- $\epsilon - \delta$.
פתרון:

3.1.2. (15 נקודות) נניח כי f רציפה ב- $[0, 1]$ וגזירה ב- $[0, 1]$. נניח בנוסף כי $f(0) = 0$ וכי $f'(0) = f'(1)$. הוכיחו שקיימת $0 < c < 1$ שעבורה $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.
פתרון:

3.2. (8 נקודות) מצאו את כל ערכי ה־ $\alpha \geq 0$ שעבורם הטור הבא מתכנס: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha n + 1}{n + 1} \right)^n$.
פתרון:

שאלה 4 (25 נקודות)

4.1. (18 נקודות) נביט בפונקציה המוגדרת ע"י $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$ לכל $x > 0$, ונביט בסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת ע"י

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) & \forall n \in \mathbb{N} \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

4.1.1. (6 נקודות) חשבו את הערך המינימלי של f או הוכיחו שהוא איננו קיים.

פתרון:

4.1.2. (7 נקודות) הוכיחו שהסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מוגדרת היטב, ושהיא סדרה מתכנסת.

פתרון:

4.1.3. (5 נקודות) חשבו את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

פתרון:

4.2. (8 נקודות) מצאו פונקציה $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ שעבורה

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot (n+1)! \quad \forall 0 \leq n \in \mathbb{Z}$$

הערה: תוכלו להשאיר את התשובה כטור.

פתרון:

שאלה 5 (25 נקודות)

5.1. (8 נקודות) הוכיחו כי $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ לכל $x \geq 0$.
פתרון:

5.2. 9 נקודות) הוכיחו כי

$$\frac{1}{7\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq \frac{1}{7}$$

פתרון:

5.3. (8 נקודות) תהי סדרה של מספרים חיוביים ויהי $p > 1$. נניח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(a_n) + p \ln(n)]$ קיים. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. פתרון:

