

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי 2 (52)

מועד א' — 07/07/2023

אין לרשום פתרונות מאחורי הדף!!!

מרצה: ד"ר יוסי שמאי

משך הבחינה: 3 שעות

הוראות:

לבחינה חמש שאלות. עליכן לענות בדיוק על ארבע מתוכן. משקל כל שאלה הוא 25 נקודות. אין בחירה בין סעיפים של אותה שאלה. תשובות לא מנומקות לא יקבלו ניקוד. עליכן לצטט את כל התנאים לכל משפט או טענה. חל איסור מוחלט להסתמך על חומר שלא נלמד בקורס. בסוף הבחינה יש להגיש את כל שאלון הבחינה. אסור להפריד דפים מהשאלון! אין לרשום פתרונות במקומות שאינם מיועדים לכך! אין לרשום פתרונות מאחורי הדף!!!

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נקודות)

(א) (15 נקודות) הוכיחו כי e הוא אי-רציונלי. תוכלו להסתמך על כל משפט או טענה קודמים שלמדתן בקורס.

פתרון:

(ב) (10 נקודות) חשבו את ערך האינטגרל המסוים הבא:

$$\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}) \, dx$$

פתרון:

שאלה 2 (25 נקודות)
(א) (17 נקודות)

(ו) (2 נקודות) תהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ותהי f פונקציה הגזירה ∞ פעמים ב־ x_0 . הגדירו את המושג: טור הטיילור של f סביב x_0 .

פתרון:

(ii) (10 נקודות) מצאו את טור הטיילור סביב $x_0 = 0$ של הפונקציה $f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, ומצאו את תחום התכנסות הטור.

פתרון:

(iii) (5 נקודות) חשבו את הערך של $f^{(10)}(0)$.

פתרון:

(ב) 8 נקודות) תהי $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נניח כי $\int_0^3 f(x) dx = 0$. הוכיחו שקיימת נקודה $0 < c < 3$ שעבורה $f(c) = 0$.

פתרון:

שאלה 3 (25 נקודות)

(א) (10 נקודות) תהינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות של מספרים ממשיים. נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי, וכי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בהחלט. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ מתכנס בתנאי. פתרון:

(ב) (3 נקודות) הוכיחו שלכל $p > 0$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\frac{(-1)^n}{n^p + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{n^{2p} + (-1)^n n^p}$$

הערה: אינכם צריכות להוכיח שהביטוי שלמעלה מוגדר היטב.

פתרון:

(ג) (12 נקודות) יהי $\frac{1}{2} < p \leq 1$. הוכיחו שהטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p + (-1)^n}$ מתכנס בתנאי.
פתרון:

שאלה 4 (25 נקודות)

(א) (9 נקודות) תהיינה $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a < b$. תהי f פונקציה המוגדרת ב- $[a, b]$. נניח כי f רציפה ב- $[a, b]$ ותהי G פונקציה קדומה של f ב- $[a, b]$. הוכיחו כי

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

פתרון:

(ב) (16 נקודות)

(ו) (8 נקודות) הוכיחו שלכל $a > 0$ קיים $k \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq k$ מתקיים $n! \geq a^n$.

פתרון:

(ii) (8 נקודות) תהי סדרה של מספרים חיוביים. יהי R רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ונניח כי $R < \infty$. הוכיחו שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n! x^n$ מתבדר לכל $x \neq 0$.
פתרון:

שאלה 5 (25 נקודות)

(א) (15 נקודות) תהי $x_0, x \in \mathbb{R}$ כך ש- $x_0 < x$ ותהי f פונקציה המוגדרת ב- $[x_0, x]$. יהי $0 \leq N \in \mathbb{Z}$ ונניח כי f גזירה N פעמים ב- $[x_0, x]$. נניח בנוסף כי $f^{(N)}$ רציפה ב- $[x_0, x]$ וגזירה ב- (x_0, x) . תהי R_N שארית הטיילור של f מסדר N סביב x_0 , ונניח כי $R_N(x) = 0$.

(י) (8 נקודות) הוכיחו שקיימת נקודה $x_0 < c < x$ שעבורה $R_N^{(N+1)}(c) = 0$.

פתרון:

(ii) (7 נקודות) הסיקו כי $f^{(N+1)}(c) = 0$.
פתרון:

(ב) (10 נקודות) תהי $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(i) (3 נקודות) חשבו את הערך של $F'_x(0, 0)$.

(ii) (3 נקודות) חשבו את הערך של $F'_x(2, 2)$.

(iii) (4 נקודות) חשבו את הערך של $F''_{xy}(0, 0)$.

פתרון:

