

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי 2 (53)

מועד א' — 16/06/2022

אין לרשום פתרונות מאחורי הדף!!!

									מספר ת"ז :
									מספר מחברת :

מרצה: ד"ר יוסי שמאי
משך הבחינה: 3 שעות

הוראות:

לבחינה חמש שאלות. עליכן לענות בדיוק על ארבע מתוכן. משקל כל שאלה הוא 25 נקודות. תשובות לא מנומקות לא יקבלו ניקוד. חל איסור מוחלט להסתמך על חומר שלא נלמד בקורס. בסוף הבחינה יש להגיש את כל שאלון הבחינה. אסור להפריד דפים מהשאלון! אין לרשום פתרונות במקומות שאינם מיועדים לכך! אין לרשום פתרונות מאחורי הדף!!!

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נקודות)

(א) (13 נקודות) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים. נניח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.(i) (7 נקודות) הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
פתרון:

(ii) (6 נקודות) הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ מתכנס בהחלט.

פתרון:

(ב) (12 נקודות) קבעו האם האינטגרל הלא אמיתי הבא מתכנס או מתבדר: $\int_0^1 \frac{e^x + x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$.

פתרון:

שאלה 2 (25 נקודות) תהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ותהי $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים.

(א) (15 נקודות) תהיינה $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ שעבורן $|x_2 - x_0| < |x_1 - x_0|$. נניח כי טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ מתכנס ב- $x = x_1$. הוכיחו שטור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ מתכנס בהחלט ב- $x = x_2$.
פתרון:

(ב) (3 נקודות) הגדירו את המושג: רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. הערה: אינכן צריכות להגדיר את המושג: טור מתכנס.

פתרון:

(ג) (7 נקודות) קבעו האם הטור הבא מתכנס או מתבדר: $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots$.

שאלה 3 (25 נקודות)

(א) (19 נקודות)

(i) (3 נקודות) תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה הגזירה פעמיים ב- $x_0 = 0$. הגדירו את המושגים: פולינום הטיילור ושארית הטיילור מסדר 2 של f סביב 0. פתרון:

(ii) (4 נקודות) נביט בפונקציה המוגדרת על ידי $f(x) = \sqrt{1+x}$ לכל $x > -1$. חשבו את פולינום הטיילור מסדר 2 של f סביב $x_0 = 0$.

פתרון:

(iii) (12 נקודות) הוכיחו כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$1 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^8 \leq \sqrt{1+x^4} \leq 1 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{16}x^{12}$$

פתרון:

(ב) (6 נקודות) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: מתקיים

$$1 - \frac{\pi^2}{3!} + \frac{\pi^4}{5!} - \frac{\pi^6}{7!} + \dots = 0$$

פתרון:

שאלה 4 (25 נקודות)

(א) (19 נקודות) תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות של מספרים ממשיים. נניח כי $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ לכל $n \in \mathbb{N}$. נניח בנוסף כי הסדרה $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ עולה ממש.
(i) (4 נקודות) הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.
פתרון:

(ii) (15 נקודות) נניח בנוסף שלכל $2 \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \cdot b_{n-1} - a_{n-1} \cdot b_n = (-1)^n$. הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ קיים.
פתרון:

(ב) (6 נקודות) חשבו את הגבול הבא, או הוכיחו שהוא איננו קיים:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^3}{x^4 + 2y^8}$$

פתרון:

שאלה 5 (25 נקודות)

- (א) (16 נקודות) נביט בטור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n-1)!}$.
(i) (4 נקודות) מצאו את תחום ההתכנסות של הטור.
פתרון:

(ii) (12 נקודות) נביט בפונקציה המוגדרת על ידי: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n-1)!}$ לכל x השייך לתחום ההתכנסות שמצאתן בסעיף הקודם. מצאו ביטוי פשוט (ללא סיגמה) עבור f בתחום הגדרתה, והסיקו את ערך הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$. פתרון:

(ב) (9 נקודות) תהיינה $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a < b$ ותהי f פונקציה המוגדרת בקטע $[a, b]$. נניח כי f^2 אינטגרבילית ב- $[a, b]$ וכי $\int_a^b f^2(x) dx = 0$. תהי $x_0 \in (a, b)$. הוכיחו שאם f רציפה ב- x_0 , אזי $f(x_0) = 0$.
פתרון:

